7. Frage: Welche Eigenschaften haben Produktionsfunktionen mit mehr als einem variablen Faktor?

Dies kostet etwas mehr Zeit als die Ein-Faktor-Produktionsfunktion, deshalb ab jetzt auch längere Abschnitte.

Zunächst zwei Beispiele für **einfache** 2-Faktor-Produktionsfunktionen, die nicht ganz dem allgemeinen Bild entsprechen, das wir später entwerfen.

7.1. Beispiele und allgemeine Annahmen

2-Faktoren Produktionsfunktion

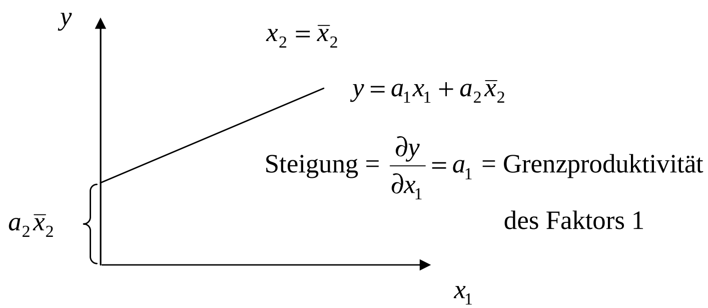
$$y = f(x_1, x_2, \underbrace{\bar{x}_3 \ldots, \bar{x}_n}_{\text{fixe Faktoren}})$$

Darstellung durch Ertragsgebirge

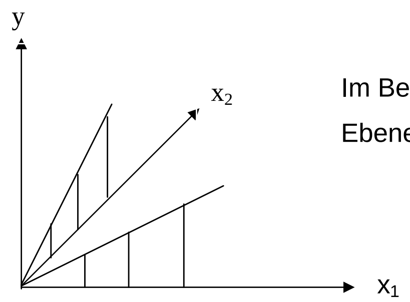
Beispiel: Wärmeerzeugung durch Heizöl, Gas
(Kalorienzahl y) (Menge x_1), (Menge x_2)

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

Wenn wir noch einen Faktor festhalten (= Schnitt parallel zu einer Achse), haben wir wieder eine Ein-Faktor-Produktionsfunktion (Hat aber nicht die Eigenschaft $f(0) = 0$!):



Die gleichen Verhältnisse, wenn wir Faktor 1 festhalten. Diese Überlegungen geben uns eine Vorstellung über das Ertragsgebirge.



Im Beispiel ist das Ertragsgebirge eine Ebene durch den Ursprung!

Für zeichnerische Darstellung der **2-Faktoren**-Produktionsfunktion andere Methode (nicht perspektivisch)

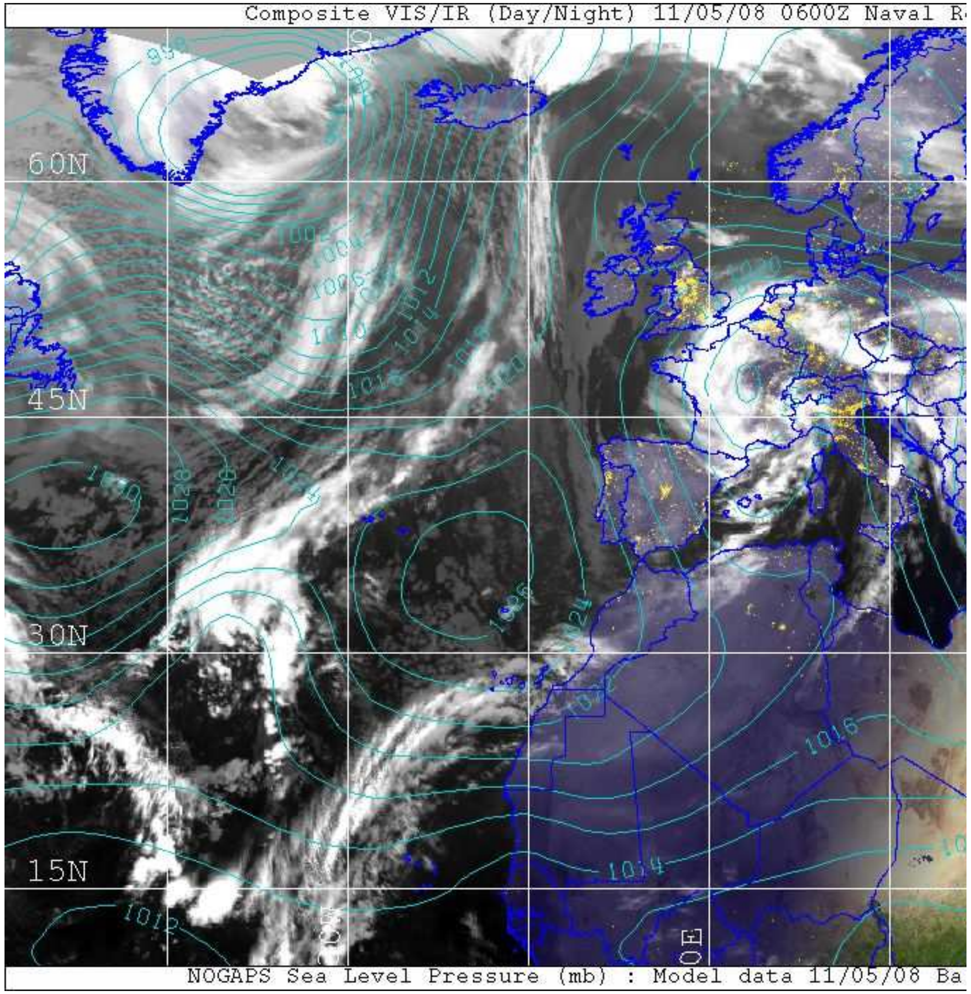
Anleihe aus Geographie:

Höhenlinien (Isohypsen)

Isobaren

Isothermen und viele andere Isolinien

Beispiel:



Wir machen es ebenso

$$\underbrace{\text{Iso}}_{\text{gleiche}}\text{-}\underbrace{\text{quanten}}_{\text{Menge}}$$

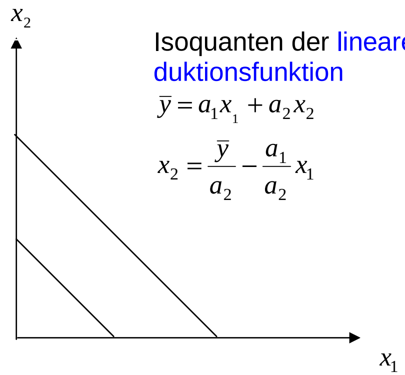
= Schnitt durch das Ertragsgebirge parallel zur Ebene der Einsatzfaktoren.

Definition: Eine **Isoquante** ist die Menge aller Inputkombinationen (x_1, x_2) [allgemein $(x_1,\dots x_n)$], mit denen der gleiche Output produziert wird.

$y = \bar{y} = f(x_1, x_2)$ $[\bar{y} = f(x_1,\dots,x_n)]$

Beispiel:

Ein Faktor kann durch den anderen ersetzt werden: substitutionale Produktionsfunktion



Isoquanten der linearen Produktionsfunktion

$\bar{y} = a_1 x_1 + a_2 x_2$

$x_2 = \frac{\bar{y}}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_1$

Beispiel:

Linear-limitationale oder Leontiefsche Produktionsfunktion

(n-Faktoren-Produktionsfunktion)

Für eine Einheit Output benötigen wir (vgl. Rezept Marsala-Pfirsiche):

a_1 Einheiten von Faktor 1

a_2 Einheiten von Faktor 2

.

.

.

a_n Einheiten von Faktor n

Die a_i heißen Input Koeffizienten.

Inputvektor = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Wie viel kann produziert werden?

x_1 reicht für $\frac{x_1}{a_1}$ Einheiten Output

x_2 reicht für $\frac{x_2}{a_2}$ Einheiten Output

.

.

.

x_n reicht für $\frac{x_n}{a_n}$ Einheiten Output

Die kleinste von diesen Zahlen gibt den Engpass an!

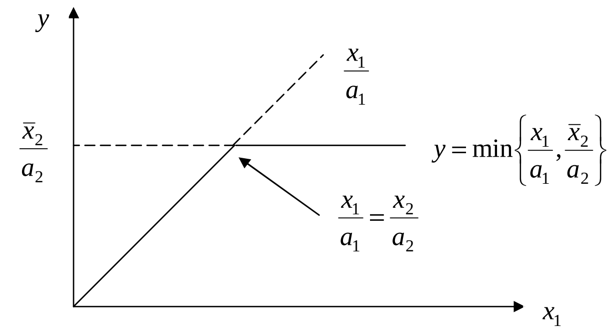
$$y = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right\}$$

Nun speziell:

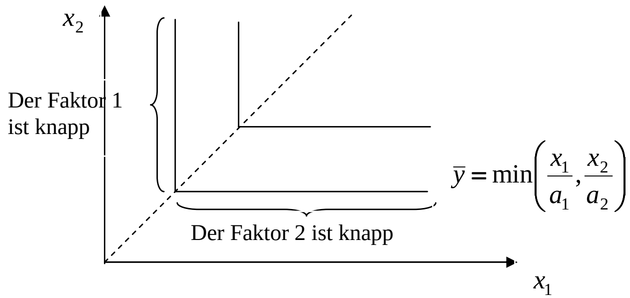
$n = 2$ und

$x_2 = \bar{x}_2$ (fest vorgegeben)

Darstellung:

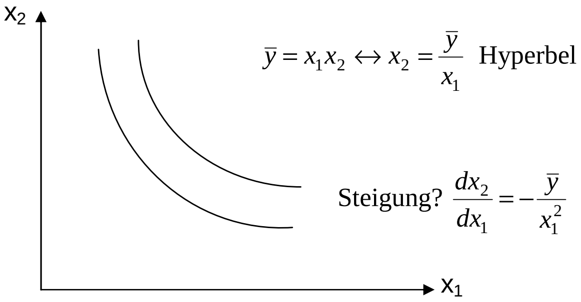


Isoquanten?



Bei der Leontiefschen Produktonsfunktion kann man ein "weniger" eines Faktors nicht durch ein "mehr" eines anderen Faktors ausgleichen. Keine **Substitution** möglich.

weiteres **Beispiel**: $y = x_1 x_2$



Was bedeutet die Steigung?

Steigung beschreibt die **Substitutionsmöglichkeiten**!

Substitution ist also möglich, aber nicht in festen Proportionen wie bei linearer Produktionsfunktion.

Im Folgenden beschreiben wir die Substitutionsmöglichkeiten genauer.

7.2. Grenzrate der (technischen) Substitution (GRS)

Definition: GRS des Faktors 1 durch den Faktor 2 gibt an, wieviel von Faktor 2 hinzugefügt werden muss, wenn man eine Einheit von Faktor 1 wegnimmt, die Produktion aber gleich bleiben soll.

Allgemein: $y = f(x_1, x_2)$ $\quad dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$ auf Isoquante

(zB $dx_1<0$ weg, dx_2 hinzu)

$$\Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

(auch wegen Satz über implizite Funktionen)

= Steigung Isoquante

$GRS = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$ (Absolutwert der Steigung der Isoquante)

Im Beispiel $y = x_1 x_2$ gilt:

$$GRS = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y / x_1}{x_1} = \frac{y}{x_1^2}$$

Allgemeiner:

$y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ (Cobb-Douglas-Produktionsfunktion)

$\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$GRS = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = \frac{\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{\alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{x_2}{x_1}$$

d.h. die Substitution von Faktor 1 wird „immer schwerer“ je kleiner x_1 bereits ist!

Leontiefsche Produktionsfunktion GRS = 0 oder ∞

d.h. Substitution ist: unnötig unmöglich

lineare Produktionsfunktion: $GRS = \frac{a_1}{a_2}$ vollständige Substitution zu fester Rate möglich.

Allgemein: Aus $\frac{\partial f}{\partial x_1} > 0$ *und* $\frac{\partial f}{\partial x_2} > 0$ folgt

(i) Isoquanten sind fallende Funktionen

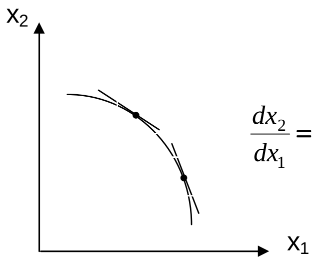
Steigung $= -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$

(ii) Zwei Isoquanten derselben Produktionsfunktion, die verschiedene Outputniveaus beschreiben, können sich nicht schneiden.

Wir wollen uns um weitere Eigenschaften der Isoquanten kümmern:

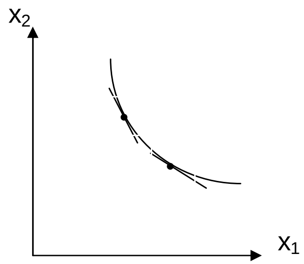
Jetzt näheres über die Form der Isoquanten:

konkav



$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

konvex



(a) Substitutionen immer leichter

(b) Substitutionen immer schwerer

Fragen:

- Wie kann man feststellen, welcher Verlauf vorliegt?
- Welche Form ist plausibel?

Beispiel: $\bar{y} = x_1 x_2 \rightarrow x_2 = \dfrac{\bar{y}}{x_1}$:

$\Rightarrow \quad \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\bar{y}}{x_1^2}$ = Steigung der Isoquante

$\dfrac{d^2 x_2}{dx_1^2} = 2\dfrac{\bar{y}}{x_1^3} > 0$ = Veränderung der Steigung (GRS sinkt!)

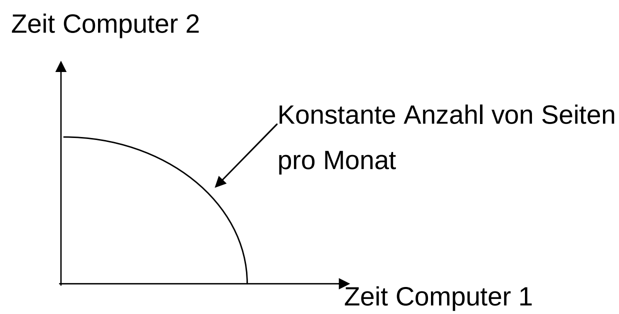
$\Updownarrow$

heißt: konvexe Funktion

Konvex: **Normalfall** (Beispiel: Getreideproduktion mit Saatgut und Dünger)

Ist konkav möglich? D. h. Inputs, die sich stören!?

Beispiel: Schreibdienst, verwendet 2 Sorten von Computern mit verschiedenen Textverarbeitungsprogrammen.



weiteres Beispiel: Übung!

Aber generell:

Annahme: Die Isoquanten der 2-Faktor-Produktionsfunktion sind konvex.

7.3. Homogene (Produktions)funktionen

Definition: Ein Funktion $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ heißt **homogen vom Grad *k***,

wenn gilt $f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^k f(x_1,\ldots,x_n)$ für alle $\lambda > 0$.

Beispiel:

(a) $y = f(x_1,x_2) = x_1 x_2^{1/2}$

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2) = \lambda x_1(\lambda x_2)^{1/2}$$
$$= \lambda^{3/2} x_1 x_2^{1/2}$$
$$= \lambda^{3/2} f(x_1,x_2)$$

ist homogen vom Grad $^3/_2$

(b) $y = f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^3}{x_2}$ (keine Produktionsfunktion)

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2) = \frac{(\lambda x_1)^3}{\lambda x_2} = \lambda^2 \frac{x_1^3}{x_2} = \lambda^2 f(x_1,x_2)$$

ist homogen vom Grad k = 2

(c) $y = f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2$

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2) = \lambda^2 x_1^2 + \lambda x_2 \neq \lambda^k f(x_1,x_2) = \lambda^k(x_1^2 + x_2)$$

ist nicht homogen

Beweis? z. B.: $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \lambda = 2$

$\Rightarrow$ (falls homogen) $f(2\cdot 1, 2\cdot 0) = 4 = 2^k \cdot f(1,0) = 2^k \cdot 1$, also k = 2

$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad \lambda = 2$

$\Rightarrow$ (falls homogen) $f(2\cdot 0, 2\cdot 1) = 2 = 2^k \cdot f(0,1) = 2^k \cdot 1$, also k = 1

$\Rightarrow$ Widerspruch!

Was können wir über die Produktionsfunktionen sagen, die wir bereits kennen?

Linear	$k = 1$	
Leontief	$k = 1$	selber zeigen!
Cobb-Douglas	$k = \alpha_1 + \alpha_2$	

Was bedeutet Homogenität für Produktionsfunktionen?

z. B. $\left.\begin{array}{l}\lambda = 2\\ k = 1\end{array}\right\}$ heißt: Wenn alle Faktormengen verdoppelt werden:

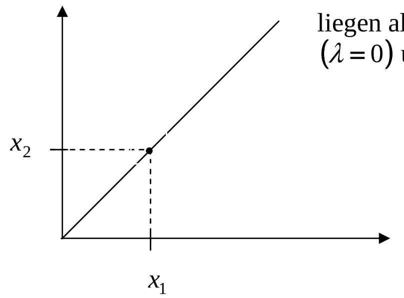
$f(2x_1,\ldots,2x_n)$,

dann verdoppelt sich der Output:

$2^1 \cdot f(x_1,\ldots,x_n)$.

z. B. $\left.\begin{array}{l}\lambda = 4\\ k = \frac{1}{2}\end{array}\right\}$ heißt: wenn alle Faktormengen vervierfacht werden, dann verdoppelt sich der Output.

Welches sind die Faktorkombinationen $(\lambda x_1, \lambda x_2)$?



liegen alle auf Gerade durch Ursprung $(\lambda = 0)$ und $(x_1,x_2)(\lambda = 1)$!

Gilt auch für mehr Faktoren!

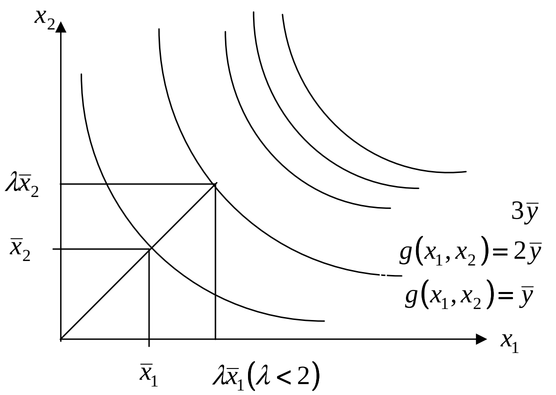
Veränderungen von λ nennt man auch **Skalenänderungen**.

Definition:

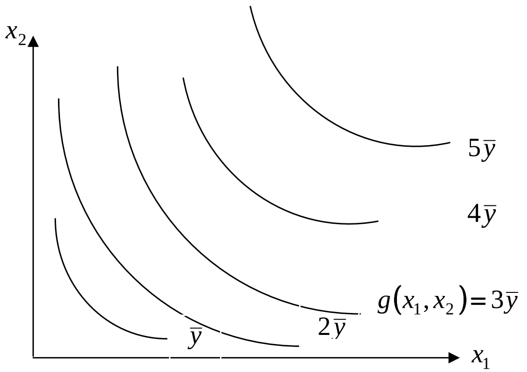
Eine homogene Produktionsfunktion hat

- zunehmende Skalenerträge, wenn $k > 1$
- abnehmende Skalenerträge, wenn $k < 1$
- konstante Skalenerträge, wenn $k = 1$.

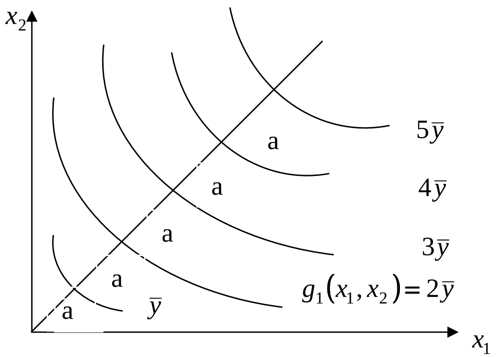
Im letzten Fall spricht man auch von linear homogenen Produktionsfunktionen.



Bei **zunehmenden Skalenerträgen** liegen die Isoquanten, die zu linear steigenden Outputwerten gehören, immer dichter.



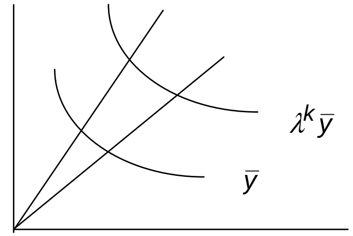
Bei **abnehmenden Skalenerträgen** immer weiter auseinander.



Bei **konstanten Skalenerträgen** verändert sich der Abstand nicht.

Was ist das besondere an homogenen Funktionen?

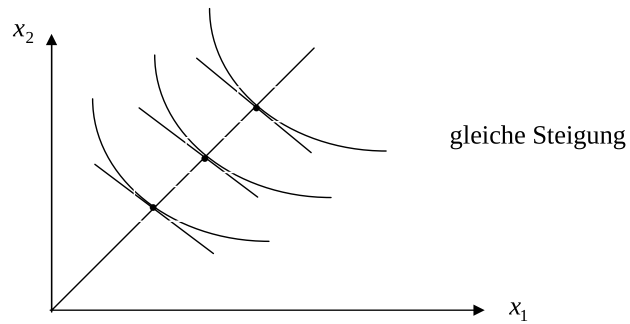
gegebene Isoquanten



Isoquante $\lambda^k \bar{y}$ ist vergrößertes (verkleinertes) maßstabgetreues Bild von $\bar{y}$.

$\Rightarrow$ Strahl schneidet die Indifferenzkurven unter gleichem Winkel, d. h.

Bei homogenen Produktionsfunktionen bleibt die Grenzrate der Substitution auf einem Strahl durch den Ursprung konstant.



Zum Beweis zunächst neue Darstellung:

$y = f(x_1, x_2)$ homogen vom Grad k

$$\Rightarrow \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^k f(x_1, x_2) = \lambda^k \cdot y$$

$$\lambda = \frac{1}{x_1} \Rightarrow f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{x_1}\right)^k y$$

$$y = x_1^k \cdot \underbrace{f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)}_{=h\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Jede homogene Funktion kann so dargestellt werden!

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = x_1 \underbrace{\left(a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1}\right)}_{h\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

Beweis nur für Interessierte: Die Steigung der Isoquante ist (unter Verwendung der neuen Darstellung)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{k x_1^{k-1} h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_1^k \cdot h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right)}{x_1^k \cdot h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \cdot \frac{1}{x_1}}$$

$$= -\frac{x_1^{k-1}\left[k h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1} h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]}{x_1^{k-1} h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

$$= -\frac{k h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1} h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

d.h. die Steigung bleibt beim Übergang von $(x_1, x_2) \to (\lambda x_1, \lambda x_2)$ unverändert.

Außerdem: Für $k = 1$, d.h. $x_1^{k-1} = 1$, bleibt nicht nur das Verhältnis der Grenzproduktivitäten, sondern jede einzelne Grenzproduktivität konstant!

Für $k = 1$ folgt
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = h\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1} h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = h'\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Deshalb gilt:
$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\left[h - \frac{x_2}{x_1} h'\right] + x_2 h'$$
$$= x_1 h - x_2 h' + x_2 h'$$
$$= x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)$$
$$= f(x_1, x_2)$$
$$= y$$

Menge Faktor 1 GP Menge Faktor 2 GP

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = y$$

heißt **Eulersches Theorem.**

Gilt für linear homogene Produktionsfunktionen
$y = f(x_1, x_2)$.